



## EKSENEL OLARAK POLİNOMİYAL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN NONLİNEER EULER-BERNOULLİ KİRİŞİNİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Sümeyye SINIR<sup>1</sup>, Mehmet ÇEVİK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik

<sup>2</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi, İzmir

### ABSTRACT

In this study, axially polynomial functionally graded non linear Euler-Bernoulli beam is analyzed. Hamilton's principle is used for obtaining the equation of motion of the beam. The equation of motion is nondimensionalized for convenience. Natural frequencies and non linear frequencies are obtained using Perturbation (Multiple Time Scales) and Differential Quadrature Method (DQM).

### ÖZET

Bu çalışmada, polinomiyal fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) non-lineer Euler- Bernoulli kirişi ele alınmıştır. Hamilton prensibi ile hareket denklemi elde edilerek, denklem boyutsuzlaştırılmıştır. Çok Zaman Ölçekli Perturbasyon yöntemi ve Diferansiyel Kareselleştirme yöntemi ile kirişin lineer ve non-lineer doğal frekansları elde edilmiştir.

### GİRİŞ

Bir kompozit türü olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler teknolojinin gelişimi ile birlikte yaygın olarak üretilmeye ve kullanılmaya başlamış ve kullanım alanları artmıştır. FDM'lerde malzeme özellikleri homojen değildir, belli bir fonksiyona bağlı yavaşça ve kademeli olarak değişmektedir. Bu malzemeler, bileşenlerini termal şoka ve yüksek oranda gerilmeye karşı korumak ve aşınma direncini artırmak amacı ile üretilmiştir[1-2].

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden kirişlerde malzeme özelliklerindeki değişim ya kesit alanı boyunca ya da kiriş boyunca gerçekleşir. Birçok araştırmacı, çalışmalarında kirişin malzeme özelliklerinin değişimini kiriş kesit alanı boyunca ele almıştır[3-26]. Araştırmacıların bir kısmı da kirişteki malzeme özelliği değişimini kiriş boyunca almıştır [27-38]. Kirişlerdeki malzeme özelliklerinin değişimiliteratürde bazı fonksiyonlar ile verilmektedir. Kuvvet yasası, kesit alanı boyunca malzeme özelliği değişiminde literatürde en çok karşımıza çıkan fonksiyondur[6-16].

Eksenel olarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler ele alınırken, kesit alanındaki değişimde olduğu gibi kiriş boyunca malzeme değişiminde de yaygın olarak kuvvet yasası dikkate alınmıştır [21,25,27]. Malzeme özelliklerinin kiriş boyunca değişimi, kuvvet yasasının yanı sıra üstel[29,39],trigonometrik[17] fonksiyonlar ve belirlenmiş polinomlara [19-20,23] göre de ele alınmıştır. Bazı çalışmalarda malzeme değişimi, hem kesit alanı boyunca hem de kiriş boyunca alınmıştır[13,40].

Literatürde yaygın olarak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden lineer Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin statik analizleri, serbest titreşimleri ve zorlamalı titreşim analizleri ele alınmıştır. Kiriş modelleri için Lagrange çarpanı[15], Navier denklemleri[11], Fredholm integral yaklaşımı[13], Newmark $\beta$  yöntemi [14,25], Sonlu elemanlar yöntemi [14-15,19], HaarWavelts yöntemi [17], Diferansiyel transform metodu[20], kuvvet serileri [25], Rayleigh-Ritz yöntemi [26] gibi literatürde bilinen birçok yöntem kullanılmıştır.

Bu çalışmamızda, non-linear Euler-Bernoulli kiriş modeli, malzeme özellikleri kiriş boyunca polinomial olarak değiştiği kabulü ile ele alınmıştır. Lineer ve non lineer doğal frekansların hesabı için Perturbasyon (Çok zaman ölçekli metot) ve Diferansiyel Kareselleştirme Yöntemi(DQM) birlikte kullanılmıştır.

### HAREKET DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre kirişin enine ve boyuna deplasmanları aşağıdaki şekilde alınmıştır [43-45],

$$u_{\hat{x}} = -\hat{z} \frac{\partial \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \quad (1)$$

$$u_{\hat{z}} = \hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) \quad (2)$$

Burada  $\hat{x}$  boyuna koordinatı,  $\hat{z}$  enine koordinatı ve  $\hat{t}$  ise zamanı göstermektedir. Ayrıca  $\hat{w} = \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$  'dır. Bunlara bağlı olarak, non-linear birim şekil değiştirme şu şekilde verilir;

$$\epsilon_{\hat{x}\hat{x}} = -\hat{z} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \quad (3)$$

Hamilton prensibine göre[43-45],

$$\int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} (\delta U - \delta K) d\hat{t} = 0 \quad (4)$$

dır. Burada  $\delta U$  virtüel potansiyel enerji,  $-\delta K$  virtüel kinetik enerji ve  $\delta$  varyasyonel operatördür. Non-linear Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemi Hamilton prensibi kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir,

$$-\frac{\partial^2 M_{11}^{(1)}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( M_{11}^{(0)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) - m_1 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2 \partial \hat{x}^2} + m_0 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} = 0 \quad (5)$$

Burada,  $m_0$  ve  $m_1$  katsayıları

$$m_0 = \int_A \hat{\rho}(\hat{x}) dA = \hat{\rho}(\hat{x}) A, \quad (6.a)$$

$$m_1 = \int_A \hat{z}^2 \hat{\rho}(\hat{x}) dA = \hat{\rho}(\hat{x}) I, \quad (6.b)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,  $M_{11}^{(0)}$  ve  $M_{11}^{(1)}$  katsayıları da

$$M_{11}^{(0)} = \int_A \sigma_{\hat{x}\hat{x}} dA, \quad M_{11}^{(1)} = \int_A \hat{z} \sigma_{\hat{x}\hat{x}} dA \quad (7)$$

şeklindedir.

Literatürde bazı çalışmalarda iki boyutlu bünye denklemleri kullanılmıştır [46-48]. Bu çalışmada ise bir boyutlu bünye denklemleri dikkate alınmıştır [45].  $M_{11}^{(0)}$  ve  $M_{11}^{(1)}$  katsayılarını yer değiştirmeye bağlı olarak ifade edersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{Bmatrix} M_{11}^{(0)} \\ M_{11}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A \hat{E}(\hat{x}) \epsilon_{\hat{x}\hat{x}} dA \\ \int_{\hat{A}} \hat{z} \hat{E}(\hat{x}) \epsilon_{\hat{x}\hat{x}} dA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\hat{E}(\hat{x})A}{2} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \\ -\hat{E}(\hat{x})I \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Burada,  $\hat{E} = \hat{E}(\hat{x})$  Young modülü,  $A$  ve  $I$  kirişin kesit alanı ve atalet momentidir.  $(\hat{\cdot})$  işaretli terimler boyutlu terimlerdir.

### BOYUTSUZLAŞTIRMA

Malzeme ve geometri bağımlılığından kurtularak evrensel sonuçlar elde etmek için aşağıda verilen terimlere göre boyutsuzlaştırma yapılacaktır,

$$x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \frac{\hat{t}}{L^2} \sqrt{\frac{E_0 I}{\rho_0 A}}, \quad w = \frac{\hat{w} L}{r^2} \quad (9)$$

Burada  $r$  atalet yarıçapı,  $L$  kiriş boyu,  $\rho_0$  kirişin başlangıç ucundaki malzemenin yoğunluğu,  $E_0$  kirişin başlangıç ucundaki malzemenin Young modülüdür. Yukarıda verilen boyutsuz terimler hareket denkleminde yerine yazarak aşağıdaki boyutsuz hareket denklemi elde edilir;

$$Hw^{iv} + 2H'w''' + H''w'' + m\ddot{w} - \varepsilon m\ddot{w}'' - \frac{\varepsilon}{2}(H'w'^3 + 3Hw'^2w'') = 0 \quad (10)$$

Burada,  $\varepsilon = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \ll 1$ . Matematik modelde yer alan  $\varepsilon$  narinlik katsayısına karşılık gelmektedir. Denkleme sonradan yapay olarak eklenmemiştir ve fiziki anlama sahiptir. Denklemden yer alan diğer katsayılar,

$$H = E(x) = \frac{\hat{E}(\hat{x})}{E_0}$$

$$m = \rho(x) = \frac{\hat{\rho}(\hat{x})}{\rho_0}$$

şeklinde elde edilir.

## PERTUBASYON VE DİFERANSİYEL KARESELLEŞTİRME YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜM

Kirişin elde edilen hareket denkleminin çözümü için Perturbasyon yöntemi kullanılacaktır. Deplasmanın perturbatif açılımı,

$$w(x, T_0, T_1; \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (11)$$

Şeklinde [41]. Burada ,  $T_0 = t$  ve  $T_1 = \varepsilon t$  dir. Zamana göre türevin mertebelenendirilmesi aşağıdaki şekildedir [41];

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Verilen perturbatif açılımlar hareket denkleminde yerine yazılarak, denklem mertebelerine aşağıdaki şekilde ayrılır;

$$O(1): mD_0^2 w_0 + Hw_0^{iv} + 2H'w_0''' + H''w_0'' = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon): mD_0^2 w_1 + Hw_1^{iv} + 2H'w_1''' + H''w_1'' \\ = -2mD_0 D_1 w_0 + mD_0^2 w_0'' \\ + \frac{1}{2}(H'w_0'^3 + 3Hw_0'^2 w_0'') \end{aligned} \quad (14)$$

Bir mertebesi çözümü,

$$w_0(x, T_0, T_1) = (B_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{B}_n(T_1)e^{-i\omega_n T_0})X_n(x) \quad (15)$$

Şeklinde [41]. Burada  $\omega_n$  doğal frekanslar,  $B_n$  hareket genlikleri ve  $X_n = X_n(x)$  şekil fonksiyonlardır.  $w_0$  çözümünü  $O(1)$  denkleminde yerine yazarak,

$$HX_n^{iv} + 2H'X_n''' + H''X_n'' - m\omega_n^2 X_n = 0 \quad (16)$$

Kiriş için iki sınır şartı aşağıdaki şekildedir.

$$X_n''(1) = X_n''(0) = 0 \text{ ve } X_n(1) = X_n(0) = 0 \text{ basit-basit} \quad (17a)$$

$$X_n'(1) = X_n'(0) = 0 \text{ ve } X_n(1) = X_n(0) = 0 \text{ ankastre-ankastre} \quad (17b)$$

Denklem (16) değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklemdir. Ve bu denklemin çözümü analitik olarak mümkün değildir.

Denk.(17) ile verilen sınır şartları altında değişken katsayılı dördüncü mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin çözümü için Diferansiyel Kareselleştirme yöntemi kullanılmıştır. Diferansiyel Kareselleştirme yönteminde problem çözüm kümesinde S tane grid noktasında diskritize edilir ve fonksiyon türevleri her bir noktadaki lineer ağırlık fonksiyonlarının değerinin toplamı şeklindedir [42].

$$\frac{dX_n(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^S C_{ij}^{(1)} X_n(x_j) \quad (18)$$

Yüksek mertebeden türevlerin ifadesi;

$$\frac{d^m X_n(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=1}^S C_{ij}^{(m)} w_j, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (19)$$

şeklindedir ve burada  $m$  türev mertebesidir.  $C_{ij}^{(m)}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, S$   $m$ . mertebeden türev için her bir  $x_i$  noktasındaki ağırlık katsayılarıdır. Ağırlık katsayılarının hesabında aşağıdaki eşitlikler kullanılmaktadır [42]:

$$M(x) = \prod_{i=1}^S (x - x_i) \quad (20)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^S (x_i - x_j), \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (21)$$

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, S \quad (22)$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^S C_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (23)$$

$$C_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^S C_{ij}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (24)$$

(18)-(24) numaralı denklemlerle verilen eşitlikleri Denk. (19)'de yerine yazarak, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.,

$$H(x_i) \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} w_j + 2H'(x_i) \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} w_j + H''(x_i) \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} w_j - \omega_n^2 m(x_i) w_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (25)$$

(18)-(24) numaralı denklemlerle verilen eşitlikleri Denk. (17)'de yerine yazarak, sınır şartları aşağıdaki şekilde diskritize edilir.

*Basit-basit mesnet şartı*

$$w_1 = 0, \sum_{j=2}^{N-1} c_{1j}^{(2)} w_j = 0$$

$$w_N = 0, \sum_{j=2}^{N-1} c_{Nj}^{(2)} w_j = 0 \quad (26)$$

Ve burada;

$$K = c_{12}^{(2)} c_{N,N-1}^{(2)} - c_{N2}^{(2)} c_{1,N-1}^{(2)}$$

$$K_1 = c_{Nj}^{(2)} c_{1,N-1}^{(2)} - c_{1j}^{(2)} c_{N,N-1}^{(2)} \quad (27)$$

$$K_2 = c_{N2}^{(2)} c_{1,j}^{(2)} - c_{12}^{(2)} c_{Nj}^{(2)}$$

Ankastre –ankastre mesnet şartı

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \sum_{j=2}^{N-1} c_{1j}^{(1)} w_j = 0 \\ w_N &= 0, \sum_{j=2}^{N-1} c_{Nj}^{(1)} w_j = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Ve burada;

$$\begin{aligned} K &= c_{12}^{(1)} c_{N,N-1}^{(1)} - c_{N2}^{(1)} c_{1,N-1}^{(1)} \\ K_1 &= c_{Nj}^{(1)} c_{1,N-1}^{(1)} - c_{1j}^{(1)} c_{N,N-1}^{(1)} \\ K_2 &= c_{N2}^{(1)} c_{1,j}^{(1)} - c_{12}^{(1)} c_{Nj}^{(1)} \end{aligned} \quad (29)$$

Diskritize edilmiş sınır şartları Denk. (25)'de yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} H(x_i) \sum_{j=3}^{S-2} \left( c_{ij}^{(4)} - \frac{c_{i2}^{(4)} K_1 + c_{iN}^{(4)} K_2}{K} \right) w_j \\ + 2H'(x_i) \sum_{j=3}^{S-2} \left( c_{ij}^{(3)} - \frac{c_{i2}^{(3)} K_1 + c_{iN}^{(3)} K_2}{K} \right) w_j \\ + H''(x_i) \sum_{j=3}^{S-2} \left( c_{ij}^{(2)} - \frac{c_{i2}^{(2)} K_1 + c_{iN}^{(2)} K_2}{K} \right) w_j \\ - \omega_n^2 m(x_i) w_i = 0, \quad i = 3, \dots, S-2 \end{aligned} \quad (30)$$

(N-4) tane eşitlikten oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Denk.(30) ile verilen denklemin çözümünden  $\omega_n$  doğal frekanslar ve  $X_n = X_n(x)$  şekil fonksiyonları elde edilir.

Denk. (15)'i Denk. (14) 'de yerleştirirsek;

$$\begin{aligned} mD_0^2 w_1 + H w_1^{iv} + 2H' w_1''' + H'' w_1'' \\ = -2D_0 D_1 (B_n e^{i\omega_n T_0} + ke) X_n \\ + mD_0^2 (B_n e^{i\omega_n T_0} + ke) X_n'' \\ + \frac{1}{2} \{ H' (B_n^3 e^{3i\omega_n T_0} + 3B_n^2 \bar{B}_n e^{i\omega_n T_0} + ke) X_n'^3 \\ + 3H (B_n^3 e^{3i\omega_n T_0} + 3B_n^2 \bar{B}_n e^{i\omega_n T_0} + ke) X_n'^2 X_n'' \} \end{aligned} \quad (31)$$

$O(\varepsilon)$  mertebe çözümü aşağıdaki şekilde verilmiştir,

$$w_1(x, T_0, T_1) = \varphi_n(x, T_1)e^{i\omega_n T_0} + W(x, T_0, T_1) + cc \quad (32)$$

Burada  $W(x, T_0, T_1)$  seküler olmayan terimlerden gelen çözüm kısmıdır.  $\varphi_n$  seküler terimlerden gelen çözümü gösterir.  $w_1$  çözümünü  $O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemde yerine yazarsak,  $\varphi_n$  ler aşağıdaki eşitliği sağlamalıdır;

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \varphi_n + H_1 \varphi_n^{iv} + 2H_1' \varphi_n''' + H_1'' \varphi_n'' \\ = -2i\omega_n D_1 B_n X_n - \omega_n^2 H_3 X_n'' + \frac{3}{2} B_n^2 \bar{B}_n H_2' X_n'^3 \\ + \frac{9}{2} B_n^2 \bar{B}_n H_2 X_n'^2 X_n'' + NST \end{aligned} \quad (33)$$

Sınır Şartları

$$\varphi_n''(1) = \varphi_n''(0) = 0 \text{ and } \varphi_n(1) = \varphi_n(0) = 0 \text{ basit-basit mesnet} \quad (34a)$$

$$\varphi_n'(1) = \varphi_n'(0) = 0 \text{ and } \varphi_n(1) = \varphi_n(0) = 0 \text{ ankastre-akastre mesnet} \quad (34b)$$

Buradan seküler terimler ayıklanarak çözüm aralığında integre edilerek çözülebilirlik şartı elde edilir.

$$-2i\omega_n D_1 B_n - \omega_n^2 d_1 B_n + \frac{1}{2} (3d_2 + 9d_3) B_n^2 \bar{B}_n = 0 \quad (35)$$

Buradaki katsayıların aşağıdaki şekildedir.

$$d_1 = \frac{\int_0^1 m X_n'' dx}{\int_0^1 m X_n'^2 dx} \quad (36a)$$

$$d_2 = \frac{\int_0^1 H' X_n'^3 dx}{\int_0^1 m X_n'^2 dx} \quad (36b)$$

$$d_3 = \frac{\int_0^1 H X_n'^2 X_n'' dx}{\int_0^1 m X_n'^2 dx} \quad (36c)$$

$B_n$  'nin polar formda ifadesi,

$$B_n = \frac{1}{2} b_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (37)$$

şeklindedir. Denk. (37) 'yi Denk. (35) yerine yazıp reel ve sanal kısımları ayırştırsak,

$$D_1 b_n = 0 \quad (38a)$$

$$b_n D_1 \beta_n - \frac{\omega_n d_1 b_n}{2} + \frac{1}{16\omega_n} (3d_2 + 9d_3) b_n^3 = 0 \quad (38a)$$

Reel kısmın çözümünden (Denk.(38a)),  $b_n = b_0$  olarak elde edilir. Denk.(38) ile verilen denklem sisteminin çözümünden non-lineerliğin doğal frekansa etkisi  $\beta_n$  elde edilir.

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_0 + \left( \frac{\omega_n d_1}{2} - \frac{(3d_2 + 9d_3)}{16\omega_n} b_0^2 \right) T_1 \\ &= \beta_0 + \left( \frac{\omega_n d_1}{2} - \frac{(3d_2 + 9d_3)}{16\omega_n} b_0^2 \right) \varepsilon t \end{aligned} \quad (39)$$

Sonuç olarak çözüm fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} w(x, T_0, T_1) &= \left( \frac{1}{2} b_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} e^{i\omega_n T_0} + ke \right) X_n(x) \\ &= \left( \frac{1}{2} b_0 e^{i\beta_0 + i\left(\frac{\omega_n d_1}{2} - \frac{(3d_2 + 9d_3)}{16\omega_n} b_0^2\right) T_1} e^{i\omega_n T_0} + ke \right) X_n(x) \\ &= \left( \frac{1}{2} b_0 e^{i\left(\omega_n + \varepsilon\left(\frac{\omega_n d_1}{2} - \frac{(3d_2 + 9d_3)}{16\omega_n} b_0^2\right)\right) t + i\beta_0} + ke \right) X_n(x) \end{aligned} \quad (40)$$

## SAYISAL SONUÇLAR

Non-lineer Euler-Bernoulli kirişi için malzeme özelliklerinin polinomiyal olarak değiştiği üç durum göz önüne alınmıştır. Aşağıda verilen boyutsuz polinomlar yoğunluk ve Young Modülü özelliklerindeki değişimi göstermektedir.

**1.durum:** Malzeme yoğunluğunun sabit olduğu duruma karşılık özelleştirilmiş Young Modülü durumu[11]

$$\rho(x) = 1 \text{ olduğunda } E(x) = \sum_{j=0}^4 b_{0j} x^j \quad (41)$$

**2.durum:** Malzeme yoğunluğunun lineer değişimine karşılık özelleştirilmiş Young Modülünün olduğu durum[11]

$$\rho(x) = 1 + x \text{ olduğunda } E(x) = \sum_{j=0}^5 b_{1j} x^j \quad (42)$$

**3.durum:** Malzeme yoğunluğunun parabolik değişimine karşılık özelleştirilmiş Young Modülünün olduğu durum[11]



$$\rho(x) = 1,5954 + 0.04x + x^2 \text{ olduğunda } E(x) = \sum_{j=0}^6 b_{2j}x^j \quad (43)$$

Çizelge 1.  $\rho(x) = 1$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	58.1720
2	232.5303
3	523.0285

Çizelge 2.  $\rho(x) = 1$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	132.0307
2	363.4562
3	712.1312

Çizelge 3.  $\rho(x) = 1 + x$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	77.1653
2	309.7661
3	697.5024

Çizelge 4.  $\rho(x) = 1 + x$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	174.7482
2	483.0959
3	948.3026

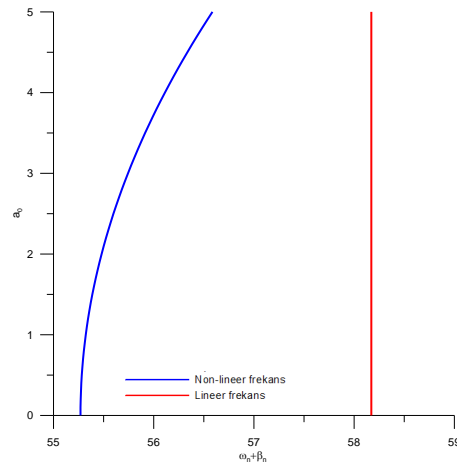
Çizelge 5.  $\rho(x) = 1,5954 + 0.04x + x^2$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	88.9472
2	353.3084
3	793.9631

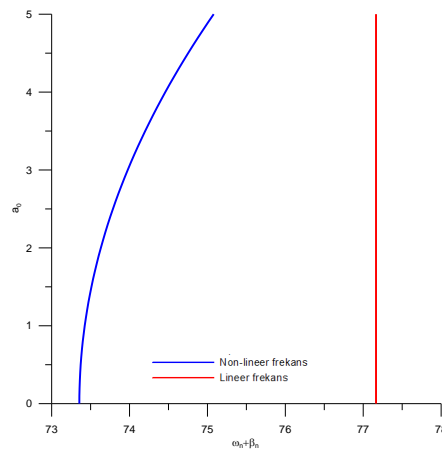
Çizelge 6.  $\rho(x) = 1,5954 + 0.04x + x^2$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer doğal frekansları

n	$\omega_n$
1	202.0563
2	553.7392
3	1082.8914

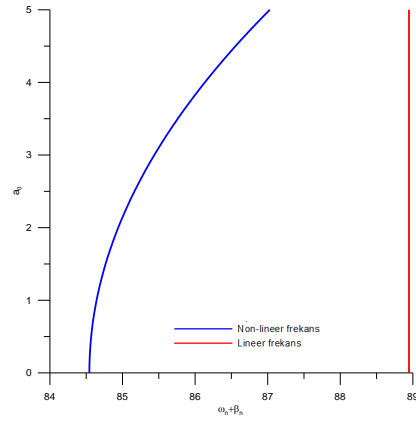
Çizelgelerde basit-basit ve ankastre-ankastre mesnet şartları için Diferansiyel Kareselleştirme Yöntemi ile elde edilen lineer doğal frekanslar verilmiştir.



Şekil 1.  $\rho(x) = 1$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi

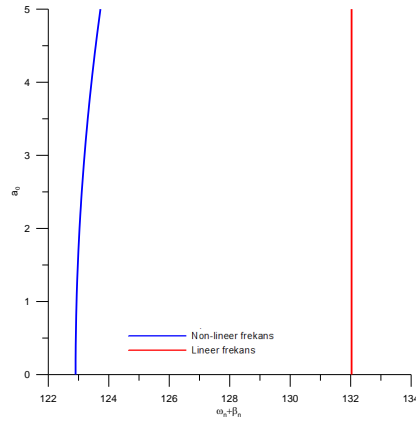


Şekil 2.  $\rho(x) = 1 + x$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi

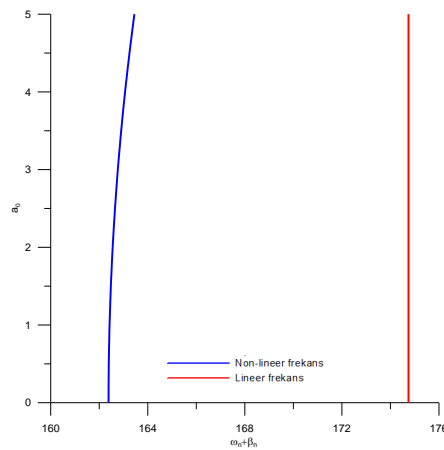


Şekil 3.  $\rho(x) = 1,5954 + 0.04x + x^2$  durumu için basit-basit mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi

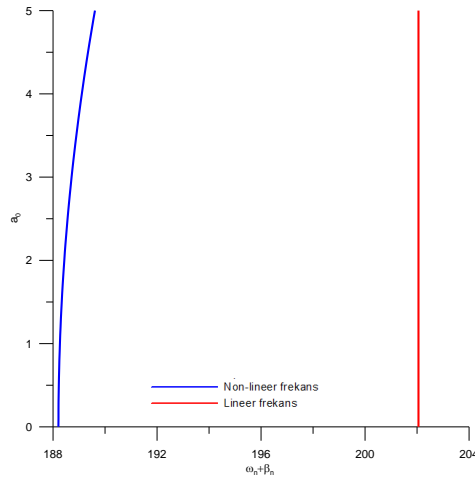
Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3de basit-basit mesnetli kirişin üç farklı malzeme değişimine göre lineer ve non-lineer doğal frekanslarının genlikle değişimleri verilmiştir.



Şekil 4.  $\rho(x) = 1$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi



Şekil 5.  $\rho(x) = 1 + x$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi



Şekil 5.  $\rho(x) = 1,5954 + 0.04x + x^2$  durumu için ankastre-ankastre mesnetli kirişin lineer ve non-lineer frekanslarının genlikle değişimi

Şekil 4, Şekil 5 ve Şekil 6’da basit-basit mesnetli kirişin üç farklı malzeme değişimine göre lineer ve non-lineer doğal frekanslarının genlikle değişimleri verilmiştir.

## SONUÇLAR

Eksenel olarak polinomiyal fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) imal edilmiş non-lineer Euler- Bernoulli kirişi ele alınmıştır. Hamilton prensibi ile hareket denklemi elde edilerek, denklem literatürde bilinen terimlerden farklı terimlere göre boyutsuzlaştırılmıştır. Yapılan boyutsuzlaştırma sonrasında non-lineer terimlerin başında fiziksel olarak anlamlı  $\varepsilon$  parametresi gelmiştir. Kirişin serbest titreşim analizi Çok Zaman Ölçekli Perturbasyon Yöntemi ve Diferansiyel Kareselleştirme Yöntemi ile yapılmıştır. Çok Zaman Ölçekli Perturbasyon Yöntemi ve Diferansiyel Kareselleştirme Yöntemi literatürde yeni olarak birlikte kullanılmıştır. Üç farklı polinomiyal fonksiyon ve iki farklı mesnet durumlarında lineer doğal frekans tabloları ile her bir durum için lineer ve non-lineer fonksiyonların genlikle değişim grafikleri verilmiştir.

### EK:

Young Modülü için verilen polinomların katsayıları aşağıdaki şekilde verilmiştir [11].

$$b_{00} = 26, b_{01} = 16, b_{02} = 6, b_{03} = -4, b_{04} = 1,$$

$$b_{10} = 64.8, b_{11} = 42.8, b_{12} = 20.8, b_{13} = -1.2, b_{14} = -2.2, b_{15} = 1,$$

$$b_{20} = 108.4888, b_{21} = 71.9746, b_{22} = 35.4605, b_{23} = -1.0537, b_{24} = 6.2634, b_{25} = 3.28, b_{26} = 1$$

**KAYNAKLAR**

- [1] A. Chakrabarty, S. Gopalakrishnan, J.N., Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2003) 519-539.
- [2] S. Suresh, A., Martensen, *Fundamentals of functionally graded material*, IOM Communications Ltd, London, 1998.
- [3] B V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams., *Compos Sci Technol* 61(2001)689–96. doi:10.1016/S0266-3538(01)00007-0.
- [4] I. Elishakoff, Z. Guede, Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams, *Mech Adv Mater Struct* 11(2004) 517–33. doi:10.1080/15376490490452669.
- [5] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, *Mater Des* 28 (2007) 1651–6. doi:10.1016/j.matdes.
- [6] XF. Li, A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, *J Sound Vib*, 318(2008)1210–29. doi:10.1016/j.jsv.2008.04.056.
- [7] R. Kadoli, K. Akhtar, N. Ganesan, Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory, *Appl Math Model* 2008;32:2509–25. doi:10.1016/j.apm.2007.09.015.
- [8] S. Kitipornchai, LL. Ke, J. Yang, Y. Xiang, Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams. *J Sound Vib* 324(2009)962–82. doi:10.1016/j.jsv.2009.02.023.
- [9] SA. Sina, HM. Navazi, H. Haddadpour, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Mater Des*;30(2009)741–7. doi:10.1016/j.matdes.2008.05.015.
- [10] A. Fereidoon, H. Yaghoobi, Full-Text. *World Appl Sci*;10(2010)337–41. doi:337-341.
- [11] Y. Huang, XL. Å, A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *J Sound Vib* 329(2010)2291–303. doi:10.1016/j.jsv.2009.12.029.
- [12] GH. Rahimi, AR. Davoodinik, Large deflection of functionally graded cantilever flexible beam with geometric non-linearity, analytical and numerical approaches. *Sci Iran* 17(2010)25–40.
- [13] G. Giunta, D. Crisafulli, S. Belouettar, E. Carrera, Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams. *Compos Struct* 94(2011)68–74. doi:10.1016/j.compstruct.2011.07.016.
- [14] A. Shahba, R. Attarnejad, MT. Marvi, S. Hajilar, Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Compos Part B Eng* 42(2011) 801–8. doi:10.1016/j.compositesb.2011.01.017.
- [15] AE. Alshorbagy, MA. Eltaher, FF. Mahmoud, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Appl Math Model* 35(2011)412–25. doi:10.1016/j.apm.2010.07.006.
- [16] M. Asghari, M. Rahaeifard, MH. Kahrobaian, MT. Ahmadian, The modified couple

- stress functionally graded Timoshenko beam formulation. *Mater Des* 32(2011)1435–43. doi:10.1016/j.matdes.2010.08.046.
- [17] H. Hein, L. Feklistova, Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Eng Struct* 33(2011)3696–701. doi:10.1016/j.engstruct.2011.08.006.
- [18] Y. Fu, J. Wang, Y. Mao, Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment. *Appl Math Model* 36(2012)4324–40. doi:10.1016/j.apm.2011.11.059.
- [19] A. Shahba, R., Attarnejad, S. Hajilar, Free vibration and stability of axially functionally tapered Euler – Bernoulli beam, *shock and vibration*. 18(2011)683-696.
- [20] A. Shahba, S. Rajasekaran, Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Appl Math Model* 36(2012)3094–111. doi:10.1016/j.apm.2011.09.073.
- [21] M. Şimşek, T. Kocatürk, ŞD. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Compos Struct* 9(2012)2358–64. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.020.
- [22] HT. Thai, TP. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *Int J Mech Sci* 62(2012)57–66. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014.
- [23] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory. *Compos Struct* 98(2013)314–22. doi:10.1016/j.compstruct.2012.11.020.
- [24] MT. Hessameddin Yaghoobi, An Analytical Approach To Large Amplitude Vibration and Post-Buckling of Functionally Graded Beams Rest on Non-Linear Elastic Foundation (2013)939–52.
- [25] Y. Huan, LE. Yang, QZ. Luo, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Compos Part B Eng* 45(2013)1493–8. doi:10.1016/j.compositesb.2012.09.015.
- [26] KK. Pradhan, S. Chakraverty, Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method. *Compos Part B Eng* 51(2013)175–84. doi:10.1016/j.compositesb.2013.02.027.
- [27] S. Rajasekaran, Buckling and vibration of axially functionally graded nonuniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach. *Meccanica* 48(2013)1053–70. doi:10.1007/s11012-012-9651-1.
- [28] S. Rajasekaran, Static, stability and free vibration analysis of arches using a new differential transformation-based arch element. *Int J Mech Sci* 77(2013)82–97. doi:10.1016/j.ijmecsci.2013.09.012.
- [29] Y. Yilmaz, Z. Girgin, S. Evran, Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Math Probl Eng* (2013). doi:10.1155/2013/793062.
- [30] M. Arefi, Nonlinear Analysis of a Functionally Graded Beam Resting on the Elastic Nonlinear Foundation. *J Theor Appl Mech* 44(2014)71–82. doi:10.2478/jtam-2014-0011.
- [31] S. Rajasekaran, E. Norouzzadeh Tochaie, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica* 49(2014)995–1009. doi:10.1007/s11012-013-9847-z.

- [32] ŞD. Akbaş, Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation. *Res Eng Struct Mater* 1(2015)25–37. doi:10.17515/resm2015.03st0107.
- [33] NVR. Maganti, MR. Nalluri, Flapwise bending vibration analysis of functionally graded rotating double-tapered beams. *Int J Mech Mater Eng* (2015)10:21. doi:10.1186/s40712-015-0040-0.
- [34] D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *Int J Mech Sci* 108–109(2016)14–22. doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.01.025.
- [35] FF. Calim, Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section. *Compos Part B Eng* 98(2016)472–83. doi:10.1016/j.compositesb.2016.05.040.
- [36] Z. Wang, X. Wang, G. Xu, S. Cheng, T. Zeng, Free vibration of two-directional functionally graded beams. *Compos Struct* 135(2016) 191–8. doi:10.1016/j.compstruct.2015.09.013.
- [37] M. Rezaiee-Pajand, SM. Hozhabrossadati, Analytical and numerical method for free vibration of double-axially functionally graded beams. *Compos Struct* 152(2016)488–98. doi:10.1016/j.compstruct.2016.05.003.
- [38] CMC Roque, PALS. Martins, AJM . Ferreira, RMN. Jorge, Differential evolution for free vibration optimization of functionally graded nano beams. *Compos Struct* 156(2016)29–34. doi:10.1016/j.compstruct.2016.03.052.
- [39] X-F. Li, Y.-A. Kang, J.-X. Wu, Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams. *Applied Acoustics*, (2013)413-420.
- [40] M. Şimşek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions., *Composite Structure*, (2015)968-978.
- [41] A., H. Nayfeh, *Introduction to perturbation Techniques*. A Wiley Inter science, John Wiley&Sons, New York, 1981.
- [42] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer, 2000.
- [43] JN., Reddy, *Enerji Principles and variation methods in applied mechanics, second edition*, John Wiley&Sons, NewYork, 2002.
- [44] JN., Reddy, *Theory and Analysis of elastic Plates and shells, second edition*, Taylor&Francis, Philadelphia, 2007.
- [45] JN., Reddy, Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams, *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 59(2011)2382-2399.
- [46] K.K., Pradhan, S., Chakraverty, Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method, *Composites: Part B*, 51(2013)175–184.
- [47] H.-T., Thai, T.P., Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(2012).57–66

- [48] M. H., Kahrobaian, M., Rahaeifard, S. A., Tajalli, M.T., Ahmadian, A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation, *International Journal of Engineering Science*, 52(2012)65-76.